

MATEMÁTICAS QUE SUSTENTAN COLUMNAS, TORRES Y RASCACIELOS

JESÚS ILDEFONSO DÍAZ *

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Universidad Complutense de Madrid.

1. INTRODUCCIÓN

Detrás de las más atrevidas estructuras, desafiando la gravedad, retando a la indispensable robustez, aparentando una falsa inestabilidad, hay matemáticas ocultas cuya misión es pasar inadvertidas, ocultar el mérito técnico para resaltar la componente artística y creativa.

Los ejemplos a los que podemos acudir no se limitan sólo a la arquitectura y obra civil de nuestros días que, sustituyendo a las más impresionantes catedrales, se han convertido hoy en verdaderos iconos atractivos de ciudades y museos capaces de movilizar un gran turismo cultural.

Uno de los casos más emblemáticos de nuestros días es, quizás, el museo Guggenheim construido en Bilbao, 1997 por Frank O. Gehry y asociados. Detrás de esos trazos que eluden verticales y horizontales se halla la obra, no menos maestra, de un nutrido grupo de ingenieros de las compañías Skidmore Owings & Cerril¹.

El estudio *Frank O. Gehry & Associates* utilizó para el cálculo de su estructura y otros propósitos un sofisticado programa de cálculo tridimensional



Figura 1. Cercha de puente en construcción.

denominado CATIA² desarrollado por *Dassault Systemes*³, inicialmente destinado para su uso en la industria aeronáutica pero que permite el tratamiento de superficies complejas por lo que también es ampliamente usado en la industria del automóvil para el

¹ La mayoría de las menciones a los autores de una gran obra arquitectónica se limita a los nombres de los arquitectos involucrados. En un buen número de ocasiones la omisión a los equipos de ingenieros que hicieron realidad esos proyectos no hace justicia a los posibles méritos que atesoran esas obras.

² CATIA (*Computer Aided Three Dimensional Interactive Application*) es un programa de CAD/CAM/CAE comercial realizado por la multinacional *Dassault Systemes*, con sede central en Francia.

³ A comienzo de 1980 la empresa *Avions Marcel Dassault* decidió su expansión a otros continentes creando, en 1990, *Dassault Systemes* con una importante participación de IBM en la empresa subsidiaria *Dassault Systemes of America*, con su base principal en Chicago y en 1993 *Dassault Systemes Kabushiki Kaisha*, con importante participación japonesa y coreana.

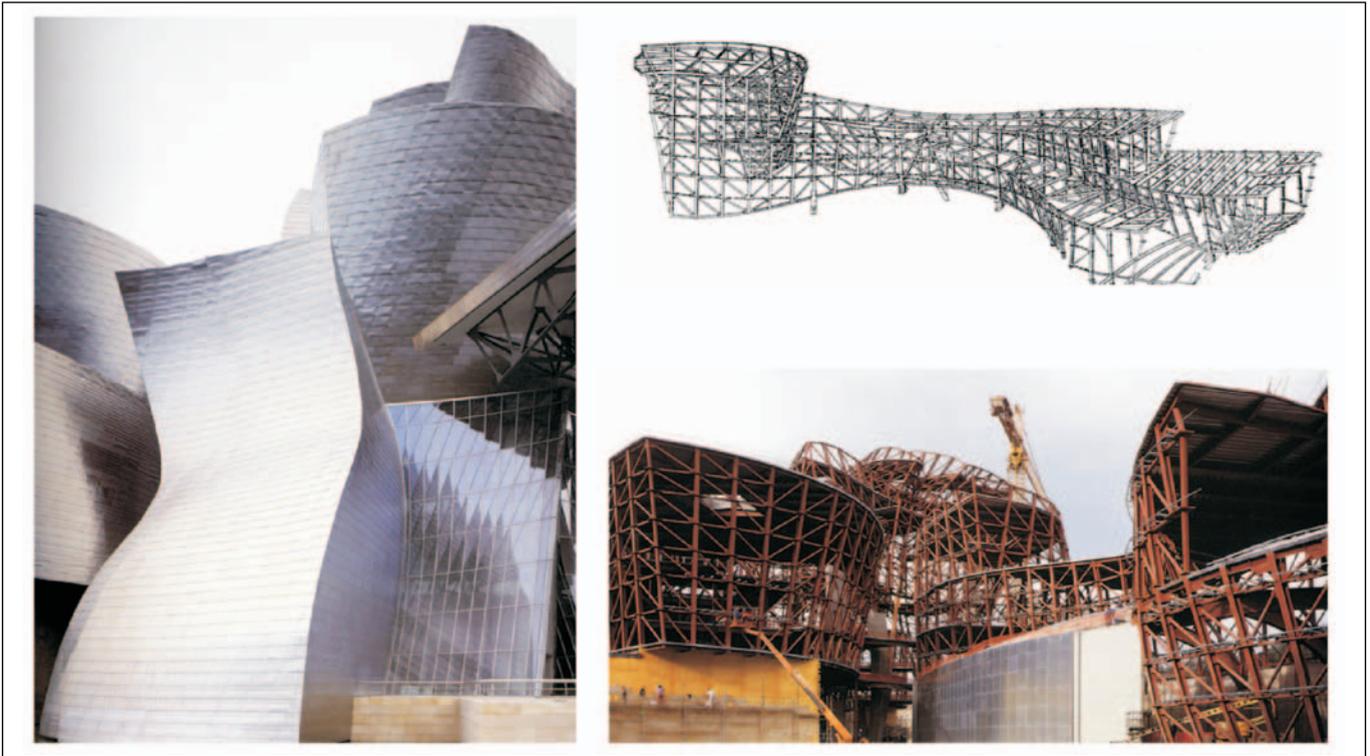


Figura 2. Distintas fases de la construcción del Museo Guggenheim de Bilbao.

diseño y desarrollo de componentes de carrocería. La participación multinacional de *Dassault Systemes*, tan indicativa de la época en la que vivimos, se ocupó no sólo del diseño y cálculo de la estructura tridimensional si no también de una tarea altamente costosa y cuya optimización tuvo una capital importancia: el diseño para corte y ensamblaje de las numerosas placas de titanio⁴.

Frank O. Gehry expone así su propia experiencia⁵:

“Esta tecnología me proporciona una manera de estar más cerca de la estructura. En el pasado, había muchas etapas intermedias entre mi boceto y la construcción final, y el ánimo del diseño podía perderse antes de que llegara a su materialización. Era como

hablar en un idioma extranjero, pero ahora, de repente, los que llevan a la práctica mis diseños me entienden. En este sentido, el programa no es deshumanizante, hace de intérprete.”

Pero en épocas anteriores el proceso no fue muy diferente. La construcción de la *Estatua de la libertad*⁶, debido a la compañía del insigne ingeniero Gustave Eiffel (1832-1923)⁷, entre 1881 y 1882, también requirió, obviamente, una estructura racionalmente diseñada con el apoyo de cálculos lejos de ser enteramente triviales.

Se trata del delicado equilibrio entre Arquitectura e Ingeniería: una “rival hermandad”⁸. Sin el concurso de

⁴ El programa CATIA fue utilizado en las diferentes etapas de construcción de la estructura: creación de un modelo físico de digitalización (producción de una serie de puntos iniciales, luego manipulados, en la pantalla del ordenador, que juntos crearon una forma que se asemeja a la forma del modelo), creación de las superficies exteriores, diseño del revestimiento de los paneles de titanio, creación de la estructura primaria principal del edificio (el esqueleto de acero del edificio), creación de la estructura secundaria (de acero galvanizado para el sistema de revestimiento) y análisis de la curvatura para determinar si los paneles de metales se adhieren a las curvas prefijadas).

⁵ <http://www.foga.com/>

⁶ De una altura de casi 93 metros: <http://www.nps.gov/stli/>

⁷ Volveremos sobre ese tema más adelante.

⁸ Este punto de vista aparece especialmente desarrollado en la obra de A. Saint, *Architect and Engineer: A Study in Sibling Rivalry*, Yale University Press, New Haven, 2008.

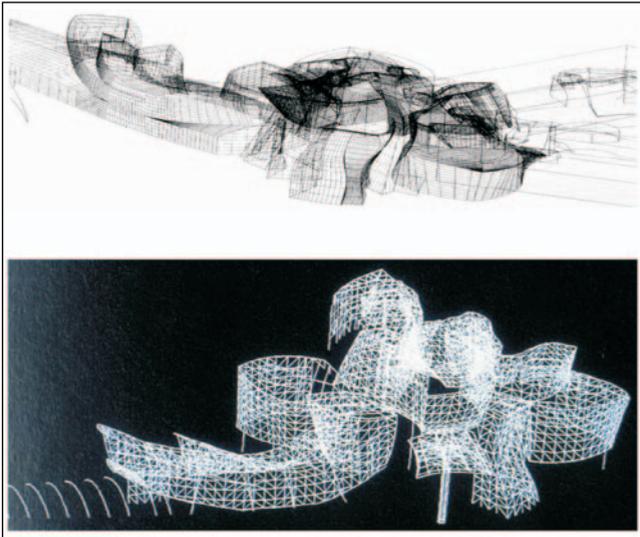


Figura 3. Diseño por elementos finitos realizado con el programa CATIA.

sofisticadas respuestas de los ingenieros hubiese sido imposible la resolución de tantos *sueños* de los arquitectos que impresionaron a la sociedad de su época.

Pero que duda cabe que esas sofisticadas respuestas de los ingenieros no dejarían de ser arriesgadas y peligrosas elucubraciones sin el auxilio de complicados modelos matemáticos que han sido previamente puestos en prueba y convalidados con el apoyo de los más potentes elementos de cálculo asequibles en ese momento. Aparecen así involucradas, de una manera implícita, las numerosas interacciones entre Matemáticas y Arte de las que se pueden ofrecer listados inagotables de testimonios. En esta exposición divulgativa pretendemos ilustrar el papel oculto de ciertos modelos matemáticos, en especial los relacionados con lo que se conoce cómo Teoría de la Elasticidad, y que ha permitido a ingenieros y arquitectos experimentar, incluso ante arriesgadas propuestas, sin las pesadumbres y costes de la escala uno a uno. Los cimientos intelectuales de esas obras radican en el conocimiento que hoy día poseemos de los medios deformables que ya apasionaron a Leonardo da Vinci y que no tendrían una fundamentación sólida hasta los tiempos de la Ilustración de la mano de los Bernouilli y de Leonhardt Euler del que se celebró su tercer centenario en 2007.

Esas matemáticas, que en la mayoría de los casos aquí sólo serán intuídas, poseen también una belleza



Figura 4. Diseño y construcción de la Estatua de la Libertad.



Figura 5. La "rival hermandad" entre Arquitectura e Ingeniería.



Figura 6. Leonardo da Vinci (1452-1519) y Robert Hooke (1635-1703).



Figura 7. Dos de las construcciones de Robert Hooke: la Willen Church de Buckinghamshire Ragley Hall y el Warwickshire Royal College of Physicians de Londres.

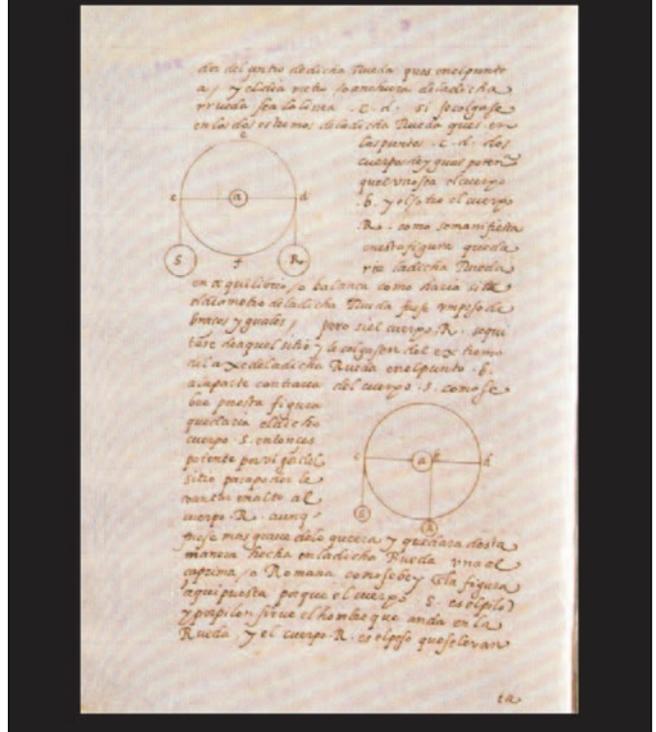


Figura 8. Visión unitaria de Geometría, Arquitectura y Máquinas por Juan de Herrera. Fragmento de *Architectura y machinas* de 1563.

estética blindada por su gran generalidad y aplicabilidad. Fenómenos de resonancia y turbulencia capaces de derribar los puentes aparentemente más seguros pueden ser ilustrados mediante modelos sencillos que nos pueden sorprender por su relevancia en los contextos más insospechados.

Arrancando en los inicios, se puede apelar a numerosos nombres que aunaron esas visiones aparentemente disjuntas, aparte del ejemplo canónico de Leonardo da Vinci (1452-1519). Una figura que merece una atención especial fue Robert Hooke (1635-1703).

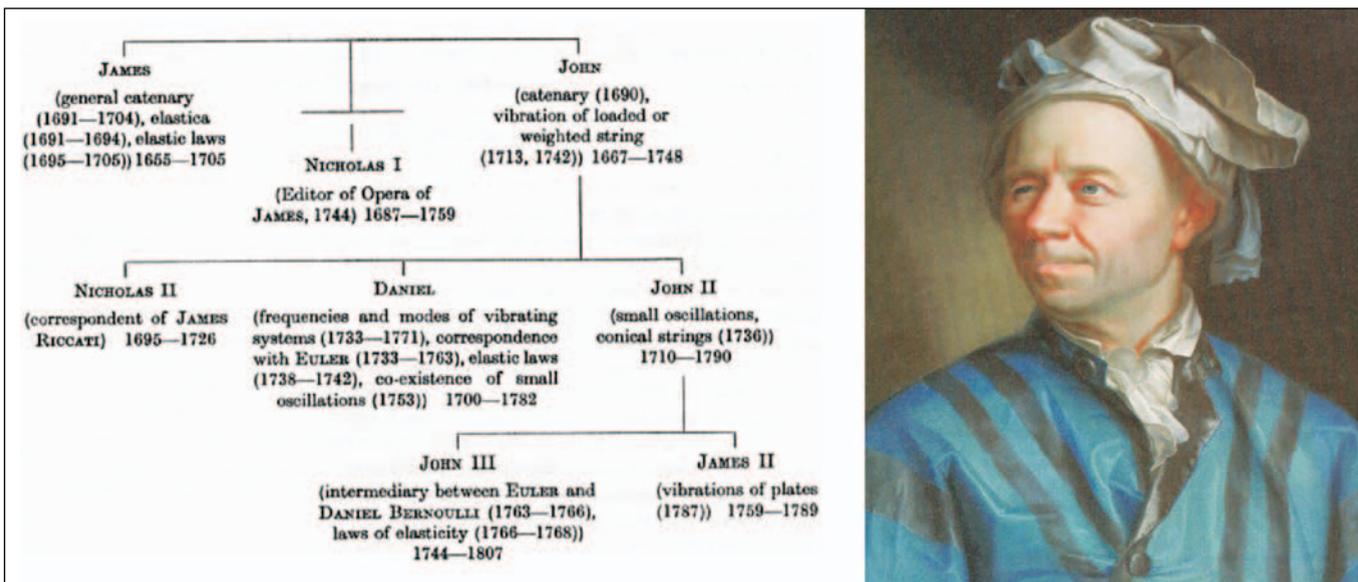


Figura 9. La familia Bernoulli y Leonhard Euler (1707-1783).

A Hooke se debe la ley más elemental de la elasticidad lineal⁹, y sólo por esto ya merece un hueco distinguido en la física, la ingeniería y la matemática, pero poca gente sabe que también fue un afamado arquitecto, además de polifacético científico, autor de numerosos inventos científicos y al que muchos denominan “el Leonardo de Londres”¹⁰.

En los primeros tiempos de la ciencia y la técnica occidentales ambos enfoques (y profesiones) coincidieron. Un ejemplo muy ilustrativo, en nuestro país, fue la figura de Juan de Herrera (1530-1597), arquitecto, matemático y diseñador de máquinas¹¹.

Se podría decir que la separación entre enfoques (y profesiones) comienza con la Ilustración y más concretamente con los “geómetras de Bassel”: la familia de

los Bernoulli y Leonhard Euler. Entre 1691 y 1748, la teoría de la elasticidad es dominada por este círculo reducido de expertos matemáticos, físicos e ingenieros¹².

Una “nueva” coincidencia se produciría en el siglo XIX en la que la aparición y control de “nuevos materiales” permiten empresas arriesgadas como la *Tour Eiffel* parisina de la que nos ocuparemos más adelante. En el pasado siglo XX, son numerosos los ejemplos que ilustran una activa colaboración entre ambos enfoques. A los antes reseñados podemos añadir, por ejemplo la Opera de Sydney (1957/1973): del arquitecto Jorn Utzon y del ingeniero Ove Arup¹³.

El siglo termina con grandes progresos de la ingeniería ante los desafíos a la estabilidad propuestos por

⁹ Hooke lo hizo primero, en 1676, mediante el anagrama *cediinnoopssstuu*, que desvelaría más tarde y que significaba *Ut Pondus Sic Tensia* (como el peso, así es la tensión) y dos años más tarde en su libro *De Potentia Restitutiva*. En aquella época el recurso a “anagramas” para codificar grandes ideas que se hacían públicas con grandes reservas era muy extendido. Huygens y, sobre todo, Newton, lo hicieron con gran frecuencia. Véase, A. Chapman, *England's Leonardo: Robert Hooke (1635-1703) and the art of experiment in Restoration England*. Proceedings of the Royal Institution of Great Britain, 67, 239-275 (1996) y G. Christianson, *Newton*. Barcelona: Salvat. 1986.

¹⁰ La trascendencia de su obra fue mantenida en cuarentena casi hasta el comienzo del siglo pasado debido a sus públicos enfrentamientos con Newton, quien le sobrevivió por 25 años y ocultó muchas de sus meritorias trazas. Véanse más detalles en la página <http://www.roberthooke.org.uk/>

¹¹ Un buen número de sus escritos y libros están digitalizados por el Instituto Cervantes (<http://www.cervantesvirtual.com>).

¹² Una exposición descendiendo a más detalles puede encontrarse, por ejemplo, en J. I. Díaz, *La elasticidad de Euler, La obra de Euler. Tricentenario del nacimiento de Leonhard Euler*. A. Galindo y M. López Pellicer eds. Instituto de España, Madrid, 2009, 115-149.

¹³ Véase, por ejemplo, el artículo de Philip Drew, *Sydney Opera House, Site, Design, Construction, Costs*, Notes for presentation to TAFE Students, Sydney, 2002.



Figura 10. Opera de Sydney (1957/1973).



Figura 11. Opera de "Signing Towers", Dubai, Emiratos Árabes Unidos. (Proyecto de Zaha Hadid).

arquitectos y de los que una buena muestra es el proyecto "Signing Towers", Dubai, Emiratos Árabes Unidos, de la ganadora del premio Pritzker de 2004, Zaha Hadid¹⁴.



Figura 12. El bibliotecario (1566) y La primavera (1573), de Giuseppe Arcimboldo (1527-1593).

A veces no se reconoce ninguna participación a la matemática en este tipo de grandes retos, pues la matemática suele ser encasillada en tareas puramente abstractas. Pero esta visión es enormemente parcial. A mi juicio, el enfoque matemático, cuando no va acompañado de su contraste con las aplicaciones, con los ingenieros, provoca una visión muy limitada de la realidad. Entre otras cosas, su inseparable condicionamiento por el rigor matemático le obliga a una parcelación de la realidad en subpartes que han de poseer, por si mismas, una justificación total. Se podría decir que aparecen muchos puntos comunes con el estilo pictórico que caracterizaba al milanense Giuseppe Arcimboldo (1527-1593)¹⁵ y sus retratos confeccionados con frutas, flores y *collages* de los más diversos objetos. Siendo bellas obras de arte, no dejan de tener un aspecto caricaturesco, de un valor estético muy particular y limitado, y muy lejano de la compleja realidad que no está sometida a esas limitaciones.

Acabaremos esta introducción indicando el plan del resto de esta exposición en la que abordaremos diferentes temas pero siempre con la lucha contra la acción de la gravedad como denominador común. Dedicaremos diferentes secciones a la mención a recursos matemáticos relacionados con la configuración de la "columna más alta", especialmente tal y como la concibió Euler en 1744. La idea inicial de aspirar a las más altas columnas se extendió, de manera natural, con el transcurso de los tiempos, en los retos que caracterizan la época en que vivimos: los rascacielos. Recursos ingeniosos sobre cómo reforzar columnas para superar

¹⁴ Quien, de hecho, es licenciada en Matemáticas por la Universidad Americana de Beirut.

¹⁵ Sobrino de Felipe II y sucesor de Juanelo Turriano en la corte de éste.

las restricciones de altura que condicionan la estabilidad de las estructuras pronto serían plasmados en útiles recursos en el diseño de un buen número de rascacielos. En una última sección nos ocuparemos de diseños intermedios entre columnas y rascacielos: las torres. Nos ocuparemos principalmente de la *Tour Eiffel*, centrándonos en las matemáticas que pudieron estar presentes en su diseño intentando lograr un equilibrio entre su peso y la fuerza resultante de vientos horizontales a diferentes alturas.

Pero también podríamos ocuparnos de otras muchas estructuras que aparentan vencer a la gravedad tales como membranas, puentes colgantes, o incluso las más recientes mezclas de varillas y cables que constituyen las estructuras denominadas como tensegridades. Son fuentes inagotables de armonía entre arte, arquitectura, ingeniería y ciencia, pero la extensión necesariamente limitada de este artículo nos aconseja posponerlo para otra ocasión¹⁶.

2. MATEMÁTICAS QUE SUSTENTAN COLUMNAS

Quizás se pueda atribuir a L. Euler el primer tratamiento matemático cuantitativo del pandeo y estudio de la carga crítica de una columna sometida a un peso en su extremo.

Como corolario de su clasificación de los nueve tipos de *elástica*¹⁷ obtuvo su famosa fórmula¹⁸ que arroja el máximo valor del peso que puede sustentar una columna sin romperse. A modo de ejemplo, Euler menciona que una columna de madera dos veces más alta que otra “aguanta” sin romperse un peso cuatro veces mayor que la otra. Pero esos trabajos de Euler habían sido precedidos de muchos otros valiosos estudios, aunque menos precisos, de otros autores entre los que podríamos citar a Leonardo da Vinci

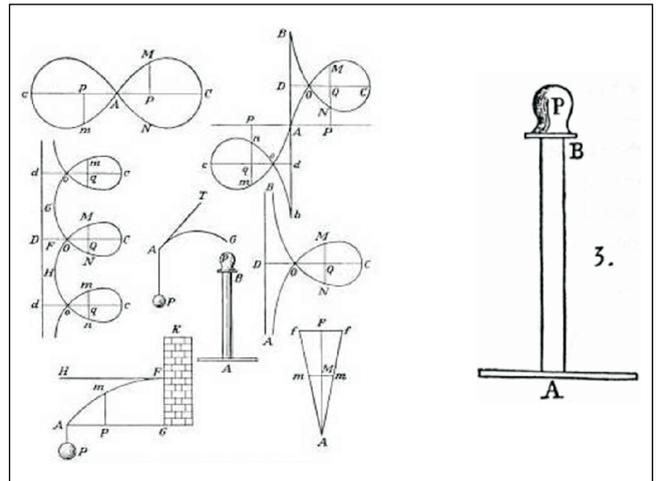


Figura 13. Clasificación de las 9 elásticas de Euler y su primer estudio del pandeo de una columna.

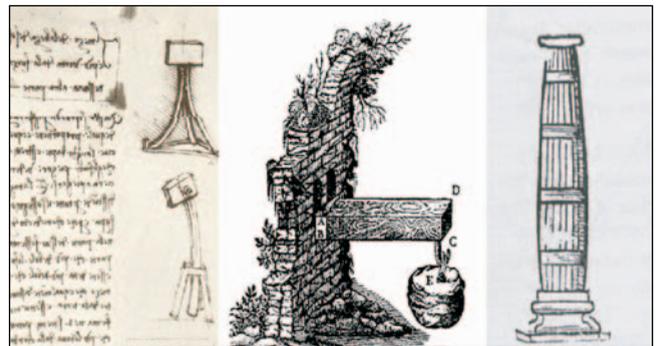


Figura 14. Estudios pioneros de Leonardo da Vinci, Galileo y Pardies sobre deformaciones elásticas.

(1452-1519), Galileo Galilei (1562-1642), Ignace-Gaston Pardies (1636-1673) y Jacques Bernoulli (1654-1705).

A Hooke se debe ya la apreciación de la “fibra neutra” y de los perfiles de compresión y dilatación de una viga deformada. De hecho, Hooke proyectó un monumento de gran altura, en forma de columna, en Londres por encargo de la ciudad de Londres para conmemorar el incendio ocurrido en 1677.

¹⁶ Ilustraciones de notables construcciones involucrando superficies de curvatura media constante y su relación con las pompas de jabón suelen aparecer en algunos artículos divulgativos. Véase, por ejemplo, J. I. Díaz, De la pompa de jabón al satélite artificial: lo óptimo como estrategia. En el libro *Horizontes culturales. Las Fronteras de la Ciencia. 2000: Año Mundial de las Matemáticas* Espasa-Calpe, Madrid, 2002, 159-172 (versión digitalizada en www.rac.es/ficheros/doc/00356.pdf).

¹⁷ Véase, por ejemplo, la reproducción realizada en sus obras completas: L. Euler, *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Scientiarum Naturalium Helveticae edenda curvaverunt F. Rudio, A. Krazer, P. Stackel. Lipsiae et Berolini, Typis et in aedibus B. G. Teubneri.

¹⁸ Que luego sería conocida como la *Euler buckling formula*. Véase, por ejemplo, el texto S. P. Timoshenko y J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, 2 ed., McGraw-Hill, 1961.

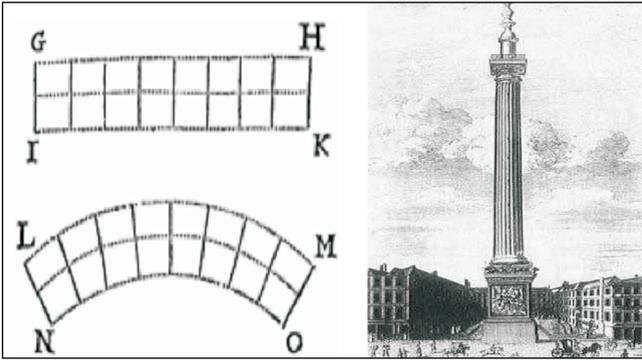


Figura 15. Estudio del pandeo de una viga de R. Hooke en *De potentia restitutiva*, Londres, 1678, y diseño del Monumento al incendio de 1677.

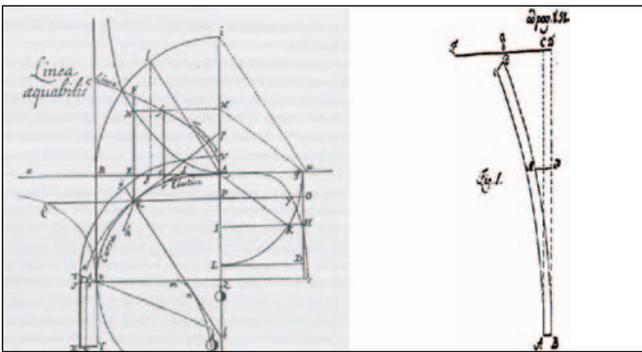


Figura 16. Elásticas y noción de curvatura según Jean Bernoulli (1667-1748).

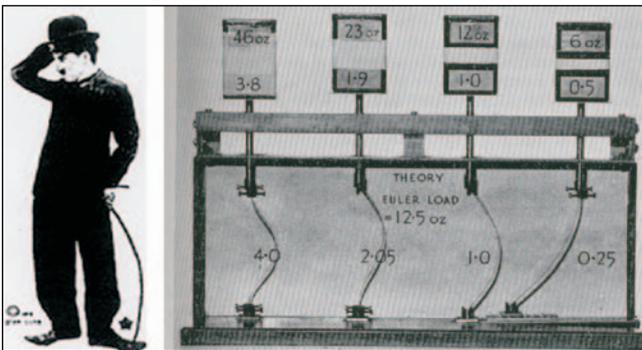


Figura 17. Variedad de perfiles de un medio elástico curvilineo.

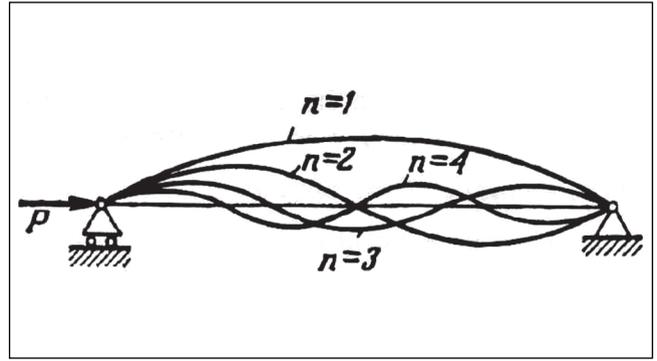


Figura 18. Frecuencias y modos propios de vibración en modelos lineales.

También, antes que Euler, se ocupó del tema Jean Bernoulli (1667-1748) quien introdujo, por primera vez, una noción de enorme trascendencia en el tratamiento de curvas y superficies: la noción de curvatura. Dedicó a ello no sólo su famoso artículo¹⁹ de 1691, si no una serie de ellos que culminarían con otro publicado en 1742.

La riqueza de diferentes perfiles que se pueden producir en un medio elástico, esencialmente curvilíneo, según la fuerza a la que están sometidos estuvo ya desde sus inicios en la mente de aquellos distinguidos científicos.

En un trabajo de 1733, pionero también de muchos estudios posteriores, otro miembro de la distinguida familia de los Bernoulli, esta vez Daniel Bernoulli, había estudiado la forma de una viga horizontal modelizandola mediante una ecuación diferencial de cuarto orden²⁰. Tan sólo dos años más tarde, en 1735, Euler le escribe una carta en la que extiende sus resultados y “resuelve” la ecuación diferencial por series (pues la formula exponencial no la introduciría Euler hasta cuatro años más tarde) obteniendo unas fórmulas que revelan que ya había entendido profundamente el significado de las nociones de frecuencias fundamentales de vibración y de modos propios de vibración.

¹⁹ Jean Bernoulli, On the curvature of extensible strings, *Acta Eruditorum*, 1691.

²⁰ En primer lugar se obtiene una ecuación de segundo orden igualada al momento angular y más tarde se elimina tal momento (pues en general es desconocido) obteniéndose una ecuación de cuarto orden igualada a la función de peso distribuida sobre la viga. Esta deducción es mostrada hoy día las primeras clases de cualquier curso sobre elasticidad. Véase, por ejemplo, A. Dou y E. de la Rosa, *Lecciones sobre elasticidad teórica*. Apuntes del Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Facultad de Ciencias de la Universidad Complutense de Madrid. Curso 1974/75, Madrid, 1976.

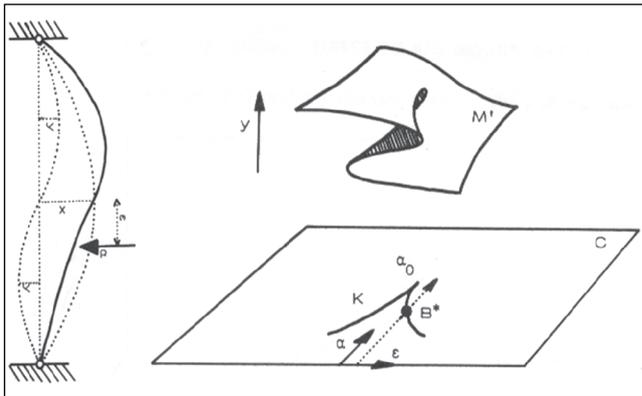


Figura 19. Grandes deformaciones de un medio elástico unidimensional y bifurcación respecto de parámetros.

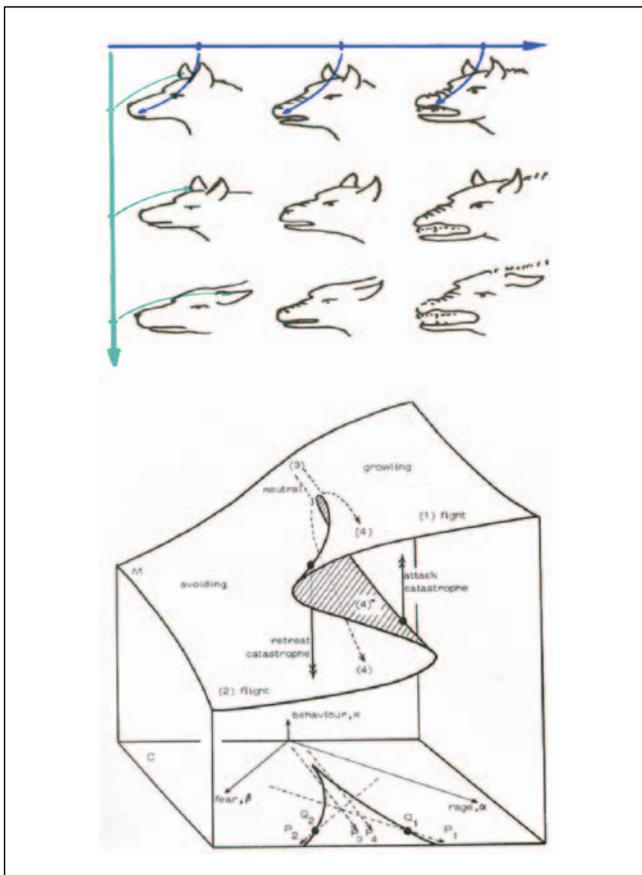


Figura 20. Transición de estados de agresión según los parámetros rabia / miedo y su interpretación en el términos de proyección de una superficie más general.

Habría que esperar a la segunda mitad del pasado siglo para que diferentes autores abordasen el caso de grandes deformaciones de medios elásticos unidimensionales y observasen procesos de bifurcación en estados estacionarios que son cercanos a la teoría de las catástrofes²¹ de René Thom (1923-2002).

Curiosamente, esos diagramas de bifurcación ante variaciones de parámetros aparecen también en contextos insospechados. Es por ejemplo lo que E. C. Zeeman mostró en una serie de trabajos²² en los que aplicó la teoría de las catástrofes a la Psicología y en particular al mecanismo de agresión por parte de animales domésticos.

Euler también se ocupó de manera pionera del complejo fenómeno de resonancia en un artículo²³ de 1739 (aunque aparecido en 1750). Tan sólo Isaac Beekman (1588-1637) y Galileo habían observado antes que él ese fenómeno, pero fue Euler quien lo formuló en términos matemáticos precisos. Supuso que la resonancia era producida por la vibración externa con una frecuencia crítica, que él formula en los siguientes términos

$$M\ddot{x} + Kx = F \sin \omega_0 t \text{ con } \omega_0 = n\omega \text{ y } \omega = \sqrt{K/M}.$$

Estos estudios tuvieron una capital importancia para la adecuada comprensión del comportamiento de medios elásticos. Así, en numerosos libros de textos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias se ilustra este fenómeno mencionando los casos de puentes hundidos por el simple hecho del mantenimiento del paso sincronizado por parte de compañías de soldados. Véase, por ejemplo, la alusión hecha en el texto de M. Braun²⁴ al hundimiento del puente de Broughton, cerca de Manchester, Inglaterra, en 1831. Pero no hace falta salir de nuestro país: el actualmente denominado *Puente de Sagasta*, de Logroño, se construyó tras el hundimiento de un puente anterior, el 1 de septiembre de 1880, por el paso de un regimiento en el que fallecieron noventa soldados²⁵.

²¹ Véase, por ejemplo, René Thom, *Paraboles et catastrophes*, Flammarion, París, 1983.

²² E. C. Zeeman, *Catastrophe theory: Selected papers, 1972-1977*, Addison-Wesley, London, 1977.

²³ De novo genere oscillationum, *Comm. Acad. Sci. Petrop.* **11**, (1739), 128-149.

²⁴ M. Braun, *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamérica, Madrid, 1990.

²⁵ El hierro de Sagasta, *Diario La Rioja*, Domingo, 13 de mayo de 2007.

Otro capítulo de gran importancia del edificio de las matemáticas lo abrió Euler, esta vez, en 1739, al interesarse por la resolución (*integración*) de las ecuaciones diferenciales lineales más elementales que se pueden plantear en el contexto de las vibraciones de los medios elásticos. Hasta ese tiempo la resolución de esas ecuaciones se abordaba únicamente mediante desarrollo en serie, pero en una famosa carta a su director de tesis, Jean Bernouilli, le comenta su invención de un método nuevo que consiste en la búsqueda de soluciones escritas en términos de la función exponencial que él mismo había introducido unos años antes. Buscaba soluciones de la forma

$$y = Ce^{px} \text{ con } p = \alpha + i\beta, \text{ e.d. } e^{px} = e^{\alpha x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x),$$

como soluciones de la ecuación diferencial lineal general con coeficientes constantes de orden n , supuesto que p se toma como raíz del que él denomina *polinomio característico*

$$\sum_{k=0}^n A_k p^k = 0.$$

En 1740, Jean Bernouilli le contesta que él también había hecho algunos cálculos similares para ciertas ecuaciones concretas y que él no aceptaba el caso en el que las raíces de tal polinomio no fueran números reales por lo que le proponía que denominase a tales entes como “números imposibles”. Euler prefirió otra denominación: “los números complejos”. La correspondencia entre ambos²⁶ puede ser entendida como las fechas en las que se forja una de las herramientas que caracteriza a la matemática de todos los tiempos posteriores: *el análisis complejo*.

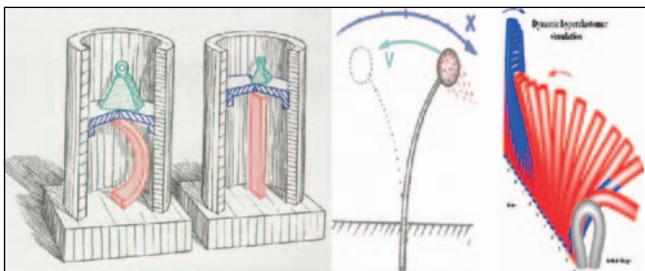


Figura 21. Distintos procesos transitorios de un medio elástico unidimensional.

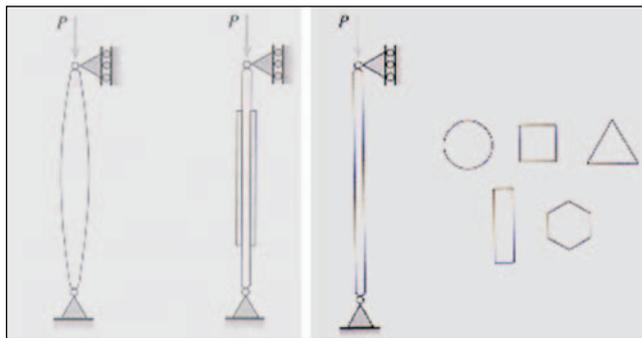


Figura 22. Columnas idealizadas sometidas a un peso con distintas secciones.

Hasta ahora las alusiones realizadas se referían tan solo a los estados elásticos estacionarios pero, por supuesto, que los aspectos dinámicos de medios curvilíneos unidimensionales han sido objeto de la atención de los más distinguidos matemáticos desde la Ilustración hasta nuestros días. Cuestiones delicadas, tales como la estabilidad cuando el tiempo se supone que converge a infinito, siguen siendo investigados bajo hipótesis cada vez más generales y que no requieren necesariamente la condición de pequeñas vibraciones que caracteriza a los modelos lineales.

Otro aspecto matemático de gran importancia está relacionado con los inicios de la teoría de Optimización y Control de ese tipo de estructuras elásticas. La búsqueda de la “mejor columna elástica” fue analizada en trabajos de numerosos autores tras otorgar un significado concreto al calificativo de “mejor”: M. Vitruvio (I b. C.) en *De Architectura* 25b. C., L.B. Alberti (1404-1472) en 1450, Euler en 1744, J. Lagrange (1736-1813) en 1773, por sólo citar algunos de ellos.

Euler inició el estudio de “la más alta columna” de sección variable con la altura y capaz de mantenerse erguida sustentando un posible peso en su extremo superior, cuando se predetermina la masa total de la columna en su trabajo de 1744 que se puede consultar en la impresionante recolección de sus obras completas antes mencionadas, cuya publicación comenzó en 1911 y que está aún inconclusa en nuestros días. Obtuvo unas fórmulas cuantitativas de un enorme valor, estimando la altura máxima en función de unos parámetros constitutivos (uno de ellos se anticipó al

²⁶ Cartas de Euler de 16 de abril, 20 de junio, 31 de agosto y 18 de octubre de 1740.

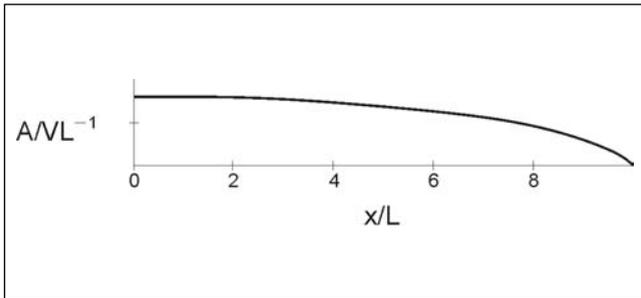


Figura 23. Perfil de la "columna más alta de Euler" según B. Keller y F. I. Niordson.

que desde bastantes años más tarde se denominaría módulo de Young).

Era el tiempo de los inicios del Cálculo de Variaciones que constituye una de las parcelas más importantes de la matemática. Curiosamente, el tema no está totalmente cerrado desde el punto de vista matemático y así, en la literatura matemática se han seguido produciendo artículos retrospectivos en los que el problema abordado por Euler se retoma bajo diferentes enfoques: véanse, por ejemplo, los trabajos²⁷ de B. Keller y F. I. Niordson de 1986, de S. J. Cox y M. L. Overton de 1992 y de J.I. Díaz y M. Sauvageot de 2010.

Señalemos que el perfil de la columna más alta depende del peso al que está sometido en su extremo superior pero en todos los casos la curva que lo configura, en función de la altura, no puede reducirse a suma finita de polinomios ni de funciones trigonométricas. Podríamos decir que es "una curva con sus propios apellidos".

La constante aspiración por construir columnas esbeltas de gran altura ha perdurado hasta nuestros días. La columna, de más de 121 metros, construida en Dublín, en 2003, por el arquitecto Ian Ritchie²⁸ y por el equipo de ingenieros Arup, es un fiel ejemplo de ello,



Figura 24. Columnas de Ritchie (Dublín, 2003) y Calatrava (Madrid, 2009).

si bien bajo condicionamientos diferentes a los propuestos de Euler y con el concurso de nuevos materiales y técnicas muy sofisticadas²⁹. Otro ejemplo ilustrativo, aunque, insistamos, sin responder a los planteamientos iniciales de Euler, es el llamado Obelisco de la Caja (Madrid 2009) de Calatrava, de 93 metros de altura³⁰.

3. COLUMNAS REFORZADAS Y HETEROGÉNEAS: RASCACIELOS

Las ideas sobre columnas altas parecen estar presentes en los primeros rascacielos que se comenzaron a edificar desde la mitad del siglo pasado. Una muestra representativa de esta presencia puede obtenerse acudiendo al proyecto, no construido³¹ del famoso arquitecto Adolf Loos (1870-1933) para la ciudad Chicago que data de 1920. Mucho más recientemente, podemos observar tal influencia en la Torre Sears, de Chicago, 1974³².

²⁷ B. Keller y F. I. Niordson, "The Tallest Column", *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1986, S. J. Cox y M. L. Overton, "On the optimal design of columns against buckling," *SIAM J. Math. Anal.* 1992 y J.I. Díaz y M. Sauvageot "Euler's tallest column revisited", *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010 (doi:10.1016/j.nonrwa.2009.09.021).

²⁸ Ian Ritchie y Robin Cross, *The spire*, Architects, Categorical Books, Londres, 2004.

²⁹ Entre otras cosas, tal columna (hueca) contiene un mecanismo estabilizador del tipo de los que haremos referencia más adelante.

³⁰ Véase, por ejemplo, la descripción realizada por el propio Calatrava en http://www.youtube.com/watch?v=bDBjmB1o_eY

³¹ Pese a que la base del proyecto de Loos fue la inspiración del Hood's National Radiator Building de Londres.

³² Su arquitecto fue Bruce Graham y la construcción estuvo a cargo de la compañía Skidmore, Owings & Merrill para los grandes almacenes Sears.

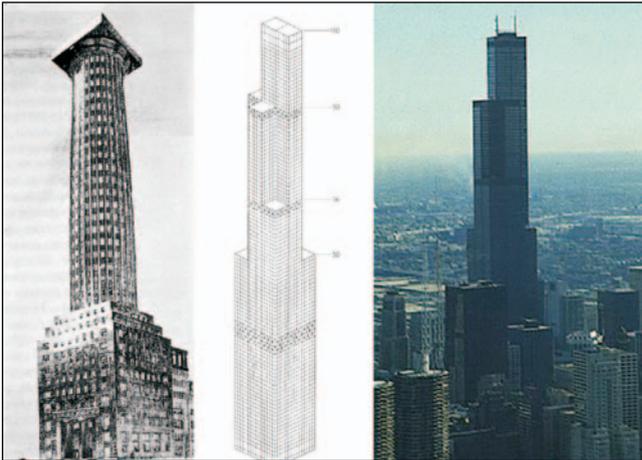


Figura 25. Proyecto de rascacielos de A. Lost de 1920 y la Torre Sears, de Chicago, 1974.

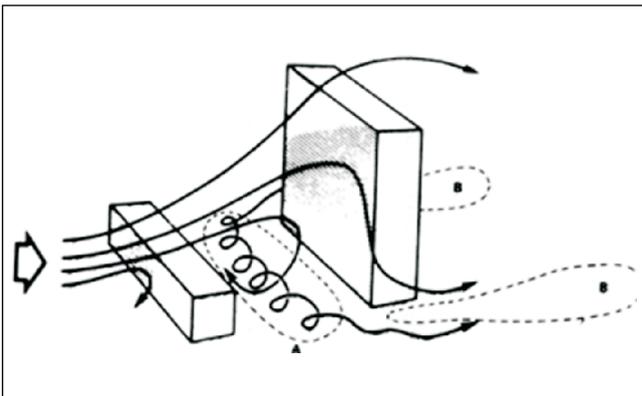


Figura 26. Corrientes artificiales creadas ante la diferencia de alturas entre varios edificios.

Ahora aparecen nuevos factores que aumentan el riesgo de su inestabilidad. En primer lugar el factor importante de los vientos y las corrientes artificiales que rodean al edificio, provocadas por una altura superior a otros edificios colindantes. Nos ocuparemos de ello en la siguiente sección, al menos como un primer acercamiento a un tema tan complejo como este.

Otras causas de inestabilidades, muchas veces catastróficas, son los movimientos sísmicos. A este respecto se han llevado a cabo numerosos estudios intentando cuantificar la amplitud de este tipo de oscilaciones.

El control e intento de amortiguamiento de esos movimientos sísmicos va desde acciones sobre el propio diseño estructural de los rascacielos a la instalación de sofisticados mecanismos inteligentes en sus plantas más altas.

Esos mecanismos corrigen de manera controlada las oscilaciones provocando, por retroalimentación, oscilaciones artificiales en sentidos opuestos que aminoran total o parcialmente la amplitud de los movimientos resultantes. Esos mecanismos están basados en sofisticados estudios sobre la teoría matemática de Control³³ pero, curiosamente, no son lejanos a los movimientos instintivos de una persona al mecerse sobre un columpio cuando desea aumentar o disminuir sus oscilaciones.

Regresemos a la columna como fuente de inspiración en el diseño de los rascacielos. Es claro que la “forma” en que se distribuye una misma cantidad de masa, en cada sección transversal, tiene una gran repercusión en los posibles movimientos y por tanto en su estabilidad. Son conceptos que fueron ya conocidos desde los trabajos pioneros sobre “sólidos rígidos”, a comienzos del siglo XVIII, y que se formularon en tér-

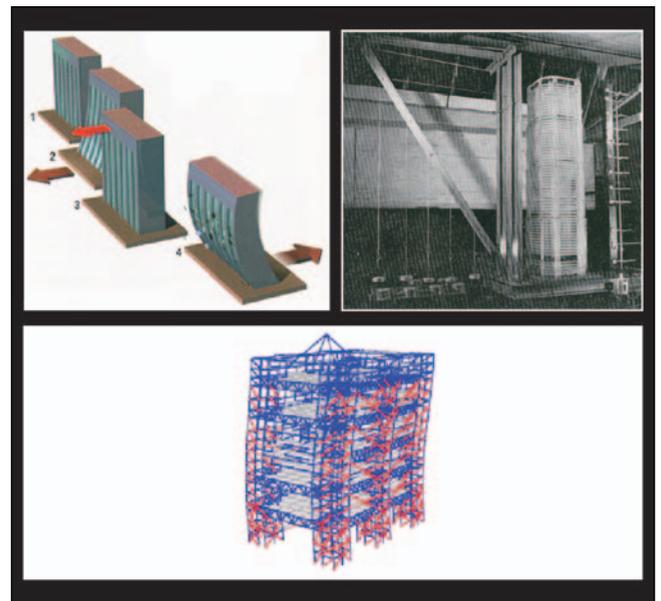


Figura 27. Movimientos sísmicos y su estudio en modelos analógicos e informáticos.

³³ La estabilización de un péndulo es uno de los temas más recurrentes de cualquier texto de control. Véase, por ejemplo, E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. Second Edition, Springer, New York, 1998.

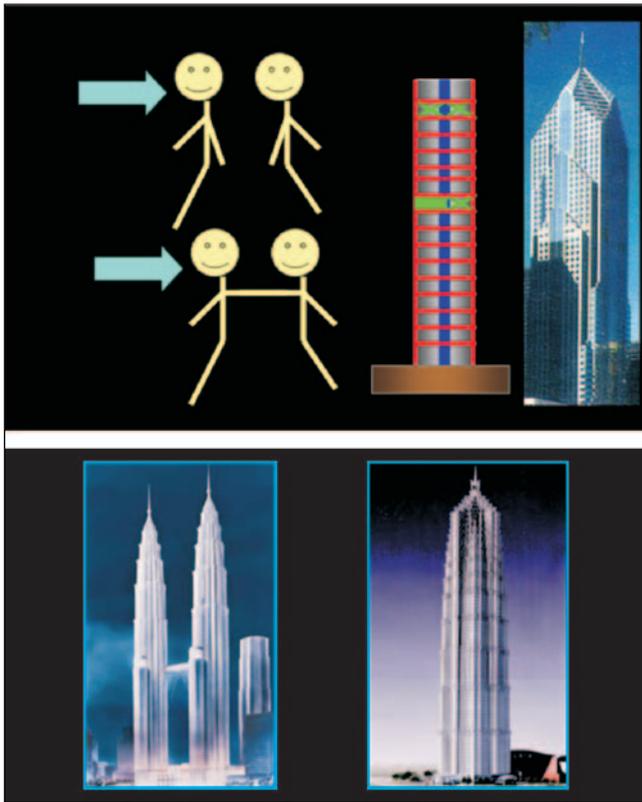


Figura 28. Diseños estructurales contra movimientos sísmicos.

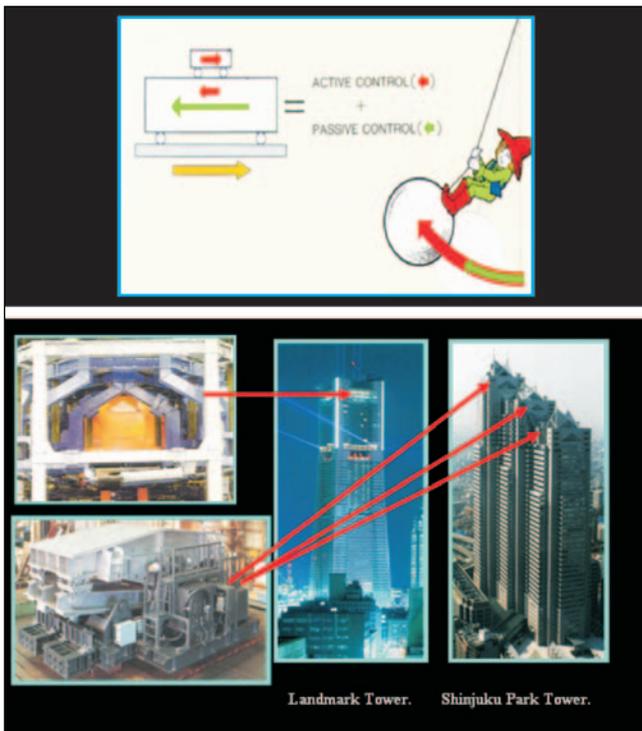


Figura 29. Control de movimientos sísmicos por mecanismos de retroalimentación.

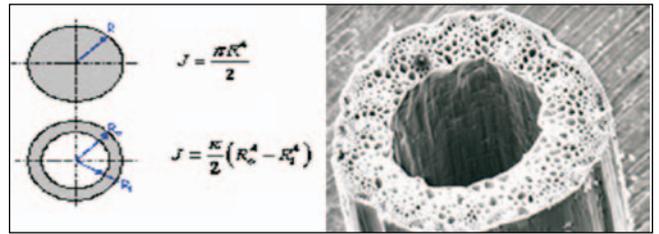


Figura 30. Consideraciones sobre la distribución de masa y los momentos de inercia.

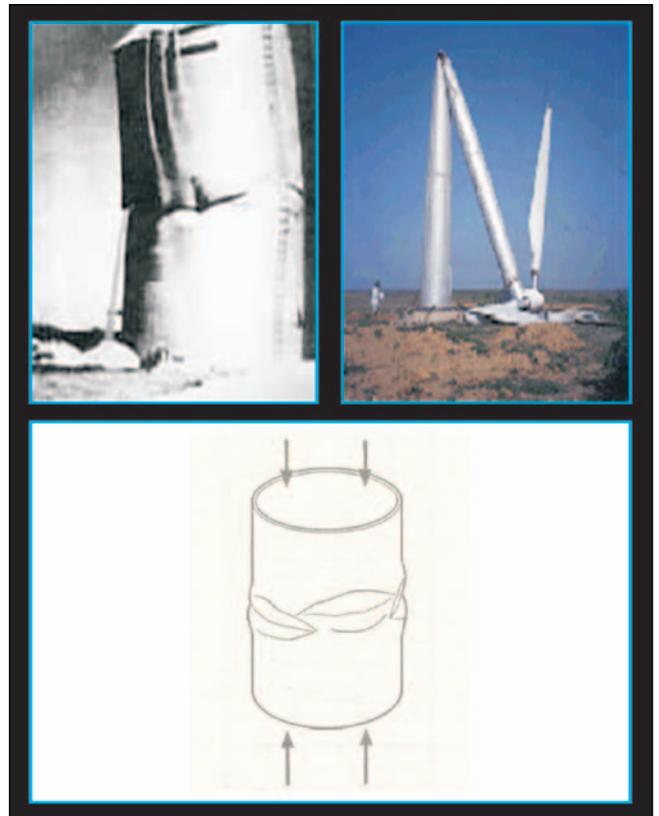


Figura 31. Fractura de Brazier.

minos de los momentos de inercia de los sólidos respecto de los distintos ejes coordenados. Por ejemplo, una razón natural por lo que los huesos de los animales son huecos es por que pese a tener su sección externa circular, su momento de inercia respecto al eje generatriz es menor que si estuviese totalmente relleno de materia ósea.

Lo ideal para construir en altura sería diseñar las estructuras prácticamente vacías en su interior. Y ese es un recurso que se lleva a la práctica en numerosos casos. Pero no cabe llevar ese recurso a un extremo



Figura 32. Refuerzo como en la planta del bambú. Torre Jinmao de Shanghai.

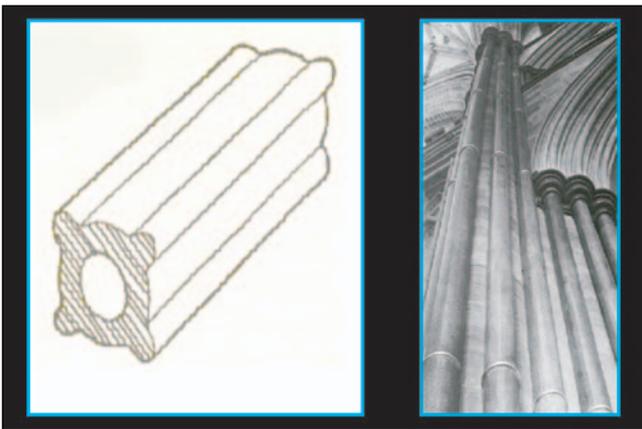


Figura 33. Columnas reforzadas por yuxtaposición de elementos básicos. Catedral de Salisbury.

pues en esos casos se produce un caso típico de fracturas que lleva el nombre de *Fractura de Brazier*.

Una primera solución de reforzamiento de la estructura³⁴ consiste en intercalar secciones sólidas a diferentes alturas. Es el fundamento de las cañas de bambú que tanto nos asombran por la gran altura que pueden llegar a alcanzar pese a su estrecha sección. La aplicación de ese recurso reforzador se puede apreciar en varios rascacielos famosos, como por ejemplo la Torre Jinmao de Shanghai Taipei, 101 de pisos debida a C.Y. Lee & Partners³⁵.

Una segunda solución de reforzamiento consiste en el recurso a “medios compuestos” que originan unas propiedades elásticas resultantes más favorables que las que tiene los elementos que los constituyen al ser tenidos en cuenta por separado. Lo podemos apreciar, a pequeña escala, en el diseño de ciertas columnas reforzadas.

Pero cuando se logra una mayor efectividad es cuando ese reforzamiento por composición de elementos se realiza a una escala que podría denominar como microscópica pero que resulta tener una gran influencia a gran escala: la escala macroscópica. Una versión elemental de este hecho se puede constatar analizando los momentos de inercia de un conjunto de varillas. Es también el mismo principio al que se acude para fabricar los más potentes cables metálicos. Desde el punto de vista matemático, se cuenta ya con todo un cuerpo de resultados, conocido como “teoría de la homogeneización” que tuvo a J.-L. Lions³⁶ y a E. Sánchez-Palencia³⁷ entre sus más distinguidos pioneros.

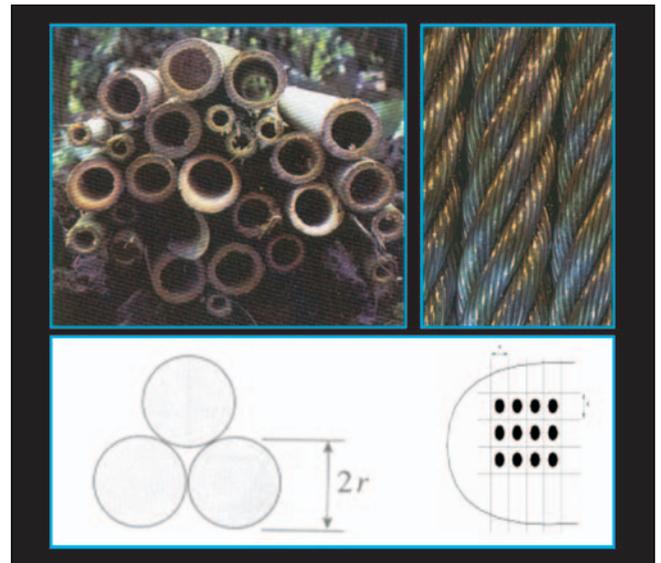


Figura 34. Reforzamiento mediante medios compuestos a “escala microscópica” y “teoría de la homogeneización”.

³⁴ Siguiendo a J. E. Gordon: *Structures et materiaux*, Pour la Science, París, 1994.

³⁵ Tal torre tiene instalado un mecanismo de control por retroalimentación en su planta 88. <http://www.universoarquitectura.com/el-jin-mao-tower-shanghai/>

³⁶ A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, Amsterdam, 1978.

³⁷ E. Sanchez-Palencia, E.: *Non homogeneous media and vibration theory*. Springer, Heidelberg, 1980. Una aplicación de este tipo de métodos al caso de la estructura del hipódromo de la Zarzuela de Madrid puede encontrarse en J. I. Díaz, E. Sánchez-Palencia, On slender shells and related problems suggested by Torroja's structures, *Asymptotic Analysis*, 52, 2007, 259-297.



Figura 35. Proyecto "Shanghai bionic tower" de Cervera & Pioz.

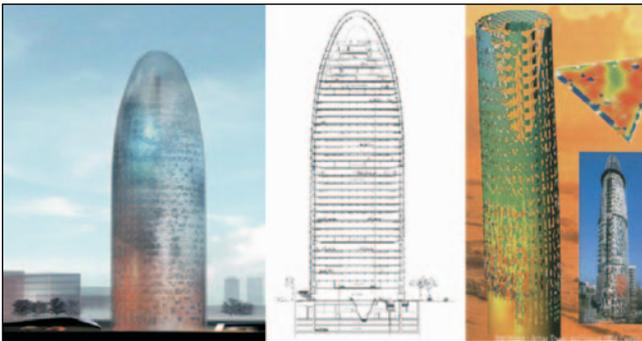


Figura 36. Torre Agbar, Barcelona 2004, de Jean Nouvel.



Figura 37. Swiss Re Tower, Londres, de Norman Foster.

Muchos de los aspectos antes señalados fueron propuestos en el proyecto "Shanghai bionic tower", de Cervera & Pioz³⁸ que contó con numerosas inspiraciones naturales y cuyo diseño aborda un buen número de metas ecológicas y sociales: la concentración en un *habitat* como un rascacielos evita la "asfaltización" de

grandes superficies de naturaleza colindantes a esos seres humanos.

Para finalizar esta sección, señalemos que algunos de los rascacielos más impactantes de los últimos diez años parecen reproducir, a gran escala, la forma de la columna más alta encontrada por L. Euler en 1744. Son los casos, por ejemplo de la Torre Agbar, Barcelona 2004, de Jean Nouvel, y de la Swiss Re Tower (Londres) de Norman Foster.

4. ARGUMENTOS MATEMÁTICOS EN EL DISEÑO DE LA TOUR EIFFEL

El reto de vencer la altura se presentó ante los mas diversos fines de las sociedades de los últimos siglos: torres de defensa, silos, torres de iluminación, torres eólicas, de refrigeración, de control en aeropuertos, antenas y torres de comunicaciones y un largo sin fin que no conseguimos finalizar en tan sólo unas pocas líneas.

Aparece así la tentación de ofrecer miles de imágenes que podrían deleitar al lector (como lo hacen al autor) pero que aquí vamos a sacrificar para dar una mayor prioridad a la línea conductora de esta exposición.

Más en particular, nos centraremos ahora en las matemáticas desarrolladas en esa quimera para luchar contra los vientos y las variaciones de presión con la

³⁸ http://www.cerveraandpioz.com/bionic_v.htm

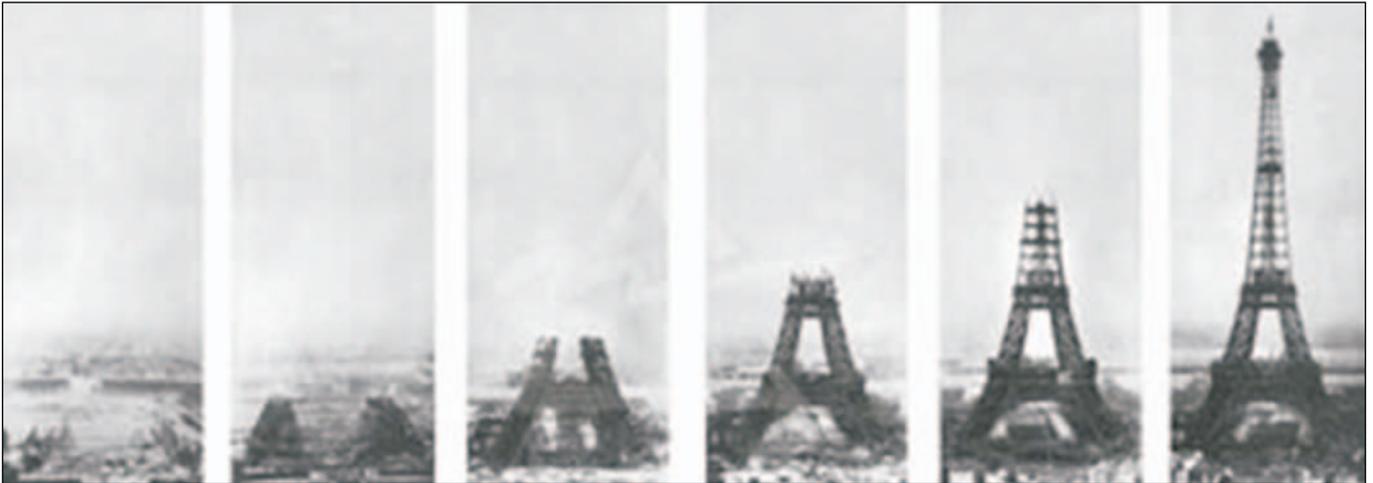


Figura 38. Evolución y fases en la construcción de la Tour Eiffel, 1888-1889.

altura. Nada mejor para ello que indagar en el posible protagonismo, siempre oculto, que pudo tener algún tipo de matemáticas en el diseño de la *Tour Eiffel*.

El punto de partida de estas indagaciones lo podríamos ligar a las declaraciones que realizó G. Eiffel al diario *Le Temps* publicadas el 14 de febrero de 1887. En ellas afirmaba lo siguiente:

“Considero que la curvatura de las cuatro aristas, consecuencia de los cálculos matemáticos, dará una gran impresión de resistencia y belleza”.

Curiosamente, el primer diseño de ese gran icono de la Exposición Universal de París de 1889 no se debió a Eiffel si no que tuvo su antecedente en el proyecto, de 1884, de una torre de 300 metros realizado por la dos ingenieros de su propia compañía: Maurice Koechlin (1856–1946) y Émile Nouguier (1840–1898), jefes de las oficinas de proyectos y de métodos, respectivamente³⁹. De hecho fue Maurice Koechlin quien había realizado los cálculos de la estructura que soporta la Estatua de la Libertad a la que nos referimos en la introducción. Eiffel no prestó ninguna atención al proyecto hasta el año 1887, fecha en la que compró la patente a sus dos colaboradores, quedando como único responsable legal del proyecto.

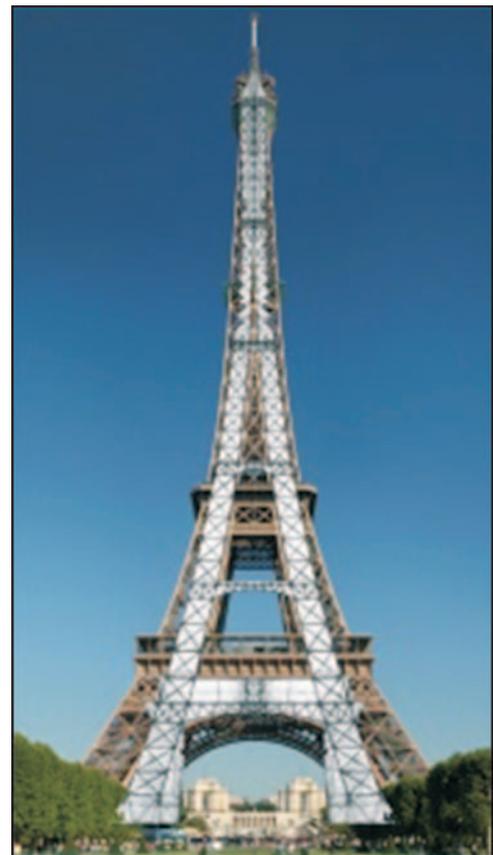


Figura 39. Superposición del diseño primitivo y la torre actual⁴⁰.

³⁹ Aún más curioso, y poco conocido, es el hecho de que en el diseño de la Torre también intervino un arquitecto (Stephen Sauvestre (1847-1919)) además de los dos ingenieros antes citados. Esta vez, fue el nombre de un ingeniero, Eiffel, y no el de un arquitecto, el único que dejó su impronta en el reconocimiento universal de la Torre.

⁴⁰ Figura extraída de http://www.insidescience.org/research/the_other_eiffel_tower. (Credit: Sketch Overlay: Pierre Bideau - SETE-illuminations | Original Photo: Benh Lieu Song).

Desgraciadamente no se ha conservado ninguna traza de los cálculos matemáticos (ni de los que pudieran haber hecho los dos ingenieros) a los que aludía Eiffel en las citadas declaraciones, pese a que si que se conserva un expediente detallado⁴¹. Pero tal expediente no contiene ninguna expresión matemática.

Esta es una de las razones por las que en los últimos años se han originado diversos intentos de reproducir lo que podrían haber sido los razonamientos matemáticos de Eiffel para el diseño de su famosa torre. Afortunadamente esos intentos no involucran matemáticas excesivamente especializadas, por lo que intentaré comentar a continuación sus argumentos principales.

En la web http://christophe.chouard.free.fr/eiffel/equation_eiffel_tower.html se realizó un primer análisis que el autor dejó inconcluso y que ha sido continuado por diversos autores. Un trabajo científico que se puede reseñar a este respecto es el de J. Gallart, publicado en la revista *Am. J. Phys.*, del año 2002⁴². Su idea principal es que la forma distintiva de la torre está diseñada con el fin de que el momento angular generado por el viento horizontal se equilibre con el momento angular generado por el propio peso de la torre. Según una cita previa⁴³:

“A cada arista de la Torre se le ha dado la forma de manera que la composición de la fuerza vertical del peso de la Torre y la fuerza horizontal de la acción del viento en cada nivel una fuerza dirigida exactamente a lo largo de la arista en cuestión”

Por otra parte, se había señalado anteriormente⁴⁴ que:

“Las patas están curvadas, de tal modo que las tangentes a ellas, dibujadas en puntos a la misma altura, se corten siempre en el punto por el que pasa la resultante de los esfuerzos del viento sobre la parte que está encima de los puntos en cuestión”

De manera equivalente: el momento debido al viento en cualquier parte de la Torre, desde una altura

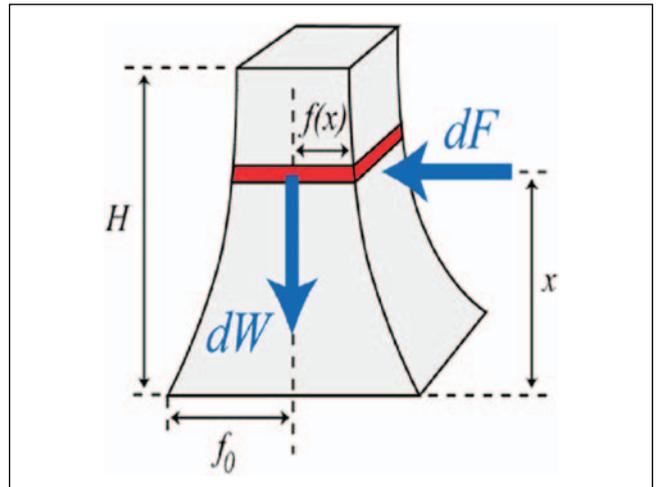


Figura 40. Perfil $f(x)$ de las aristas, resultantes elementales del peso y del viento vertical.

dada hasta la cima, debe equilibrarse con el momento del peso de esa misma parte, tomados desde un punto A de la base. Obviamente ambos momentos son vectores pero, pese a que las direcciones de las fuerzas son ortogonales entre sí, lo astuto del razonamiento es que ambos momentos tienen la misma dirección por lo que se ha de producir un balance nulo entre sus módulos.

El objetivo es determinar la función matemática $f(x)$ que describe la forma de la Torre, expresando la mitad de la anchura como una función de la altura.

Un elemento infinitesimal de volumen (que podríamos denominar como “una rebanada”) de la Torre, a altura x , de grosor dx , tiene un peso proporcional a su volumen

$$dW = gdm = g\rho [2f(x)]^2 dx = 4g\rho f^2(x)dx,$$

donde ρ es la densidad de la Torre y g es el módulo de la aceleración debida a la gravedad. La distancia a la fuerza resultante del peso (desde el punto del extremo inferior A desde el que se toman los momentos) es f_0 , la mitad de la anchura de la Torre en la base. La fuerza resultante ejercida por el viento hori-

⁴¹ G. Eiffel, *Projet d'une tour en fer de 300 mètres de hauteur destinée à L'Exposition de 1889*, *Bulletin de la Société des Ingénieurs Civils de France*, 38 (1885) pp. 345–370. Véase también su resumen en <http://www.tour-eiffel.fr/teiffel/fr/documentation/structure/page/principe.html>

⁴² Volumen 70, páginas 160-162.

⁴³ B. Lemoine, *Gustave Eiffel*, L'Imprimerie Grafos, S.A. Arte sobre Papel, Barcelona, 1986, p.86.

⁴⁴ H. Loyrette, *Gustave Eiffel*, Rizzoli International, New York, 1985, p. 114.

zontal sobre cada elemento infinitesimal de volumen, de acuerdo a la interpretación de la Mecánica de Medios Continuos, es proporcional al área (y no al volumen) y por tanto se puede escribir como

$$dF = P2f(x)dx,$$

donde P (que dependerá de la altura x) puede ser interpretado también como la máxima presión que la Torre puede soportar, a altura x , sin derrumbarse. Como dx es un infinitésimo frente a x , podemos suponer (en una primera aproximación) que la distancia del punto A de la base al elemento infinitesimal en cuestión en el que se aplica esa fuerza resultante del viento horizontal es la altura x .

Dado que la Torre está sobre el suelo hemos de tener en cuenta también las fuerzas (y sus momentos angulares) debidas a esta ligadura, pese a que *a priori* sean desconocidas. La magnitud del momento angular respecto del punto A debe ser proporcional a $(H-x)$ pues debe depender de *cuánta Torre* está sometida al equilibrio de los momentos (la condición impuesta según Eiffel). Gracias a la condición de corte de las tangentes dibujadas en puntos a la misma altura, indicada anteriormente, la anterior hipótesis queda, esencialmente, bien justificada.

De esta manera, teniendo en cuenta los sentidos opuestos de los momentos (pese a que tienen la misma dirección) llegamos al balance antes mencionado y que conduce a lo que podría entenderse como “la condición de Eiffel”. En realidad, todo lo que obtenemos es una ecuación integral para $f(x)$

$$\frac{1}{2} \int_x^H f^2(x) dx - cte \cdot (H - x) = \int_x^H xw(x)f(x) dx$$

donde la cantidad adimensional $w(x) = P/(4\rho g f_0)$ es la presión máxima del viento, dependiente de la altura x , que la Torre puede soportar sin caerse. Nótese que tanto la densidad ρ como la presión del viento P pueden variar con la altura. Por ejemplo, la densidad de la Torre ha sido calculada⁴⁵ por R. Lakes concluyendo que este material compuesto tiene una densidad de $1.2 \times 10^{-3} \rho_0$, donde ρ_0 es la densidad del hierro, en suma, una décima parte de la densidad de la más ligera madera de balsa.

Derivamos con respecto a x para hallar que

$$\frac{1}{2} f^2(x) - cte = xw(x)f(x)$$

Particularizando para $x = 0$ obtenemos que la constante desconocida ha de ser $(f_0)^2/2$ con lo que se llega a

$$\frac{1}{2} f^2(x) - \frac{1}{2} f_0^2 = xw(x)f(x)$$

Como la Torre tiene un perfil decreciente en altura tomamos la raíz negativa de esta ecuación de segundo orden para obtener la expresión

$$f(x) = xw(x) - \sqrt{x^2w^2(x) + f_0^2}$$

que suministra una expresión explícita de la forma de la arista en cuanto proporcionemos una expresión explícita de la función $w(x)$. Este es, precisamente, el argumento más débil del razonamiento de J. Gallart. Ese autor comienza analizando los perfiles que se obtendrían para diversas elecciones de $w(x)$. Por ejemplo, Gallart señala que la elección de $w(x)$ como una constante produce un perfil que se diferencia claramente del existente en la Torre.

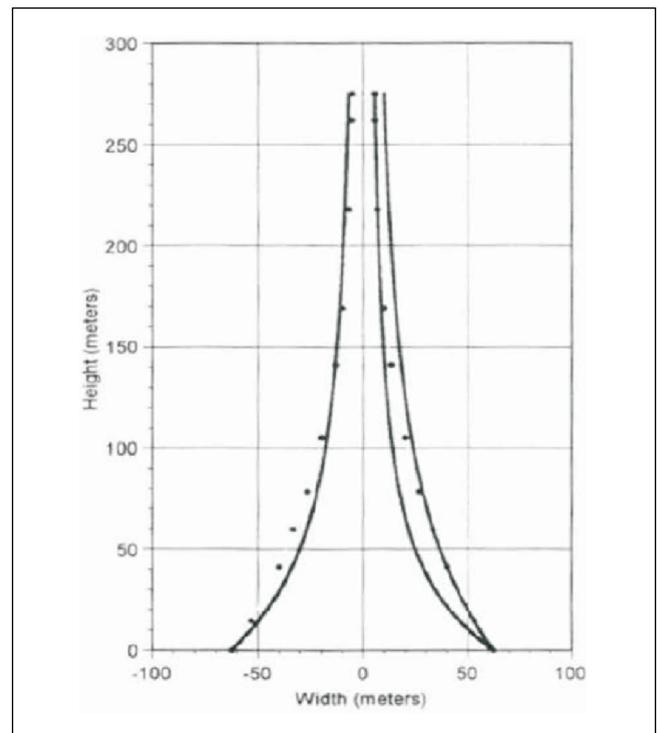


Figura 41. Comparación con el caso de $w(x)$ constante.

⁴⁵ R. Lakes, Materials with structural hierarchy, *Nature* 361 (1993) 511–515.

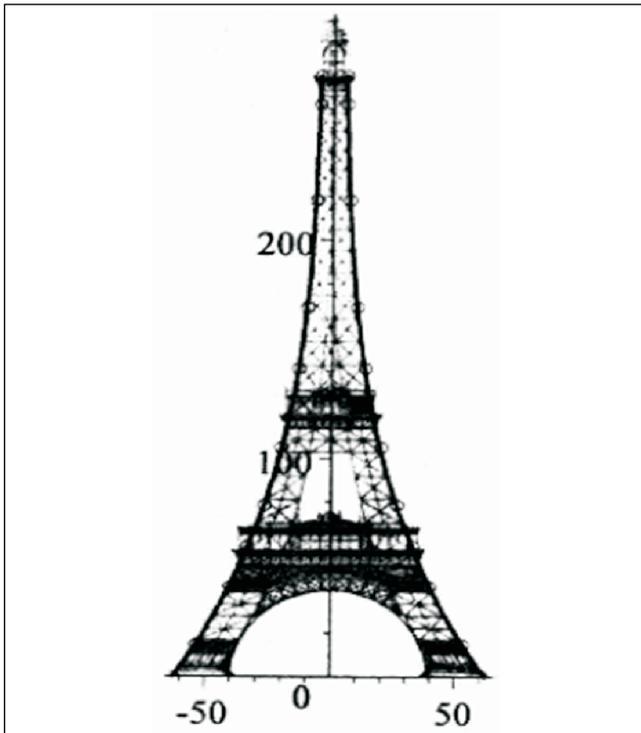


Figura 42. Perfil final con $w(x)$ un cierto polinomio de cúbico.

Tras aludir a la bien conocida experiencia en ese tema por Eiffel, fruto de sus múltiples construcciones en puentes y otras estructuras, Gallart propone la elección del polinomio cúbico

$$w(x) = 0,690 - 1,53 \cdot 10^{-3}x + 3,96 \cdot 10^{-5}x^2 - 9,22 \cdot 10^{-8}x^3$$

para el que logra una coincidencia muy aceptable entre el perfil obtenido por estos razonamientos teóricos y el realmente construido.

El anterior análisis no es especialmente cuidadoso con la modelización de los efectos el viento horizontal resultante. No es de extrañar pues que otros autores se

hayan ocupado de obtener modelos algo más precisos. Este el caso de los trabajos de P. D. Weidman y I. Pinelis⁴⁶ y de P.D. Weidman⁴⁷.

En el primer de esos artículos se señala que, de hecho, la compañía de Eiffel introdujo, en 1887, unos factores amplios de seguridad por los que en su diseño final puso a la base más del doble de lo previsto inicialmente. Weidman⁴⁸ encontró otra ecuación integro-diferencial no lineal que describe la forma de silueta de la torre, siguiendo las ideas de Eiffel. En este caso la ecuación es de la forma

$$af'(x) \int_0^x f^2(t) dt = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt$$

donde ahora a es una cierta constante (ahora se supone que el viento horizontal es uniforme). El autor muestra que el carácter no lineal de la ecuación permite que no haya unicidad de soluciones, lo que le permite descartar soluciones $f(x)$ que tienen perfiles cóncavos. Recuerda también resultados previos de R.B. Banks⁴⁹ en los que la ausencia del término debido al viento conduce a perfiles exponenciales diferentes. Finalmente, en la citada Nota en las CRAS se menciona⁵⁰ el meritorio (aunque elemental) estudio realizado en el texto de P. Puig-Adam⁵¹ en el que se obtiene (para torres de sección circular variable con la altura) un perfil exponencial más complejo al permitir que el viento horizontal pueda depender de la altura.

En el marco de la “teoría de la homogeneización”, mencionada en la sección anterior, se debe reseñar el detallado estudio, esta vez con herramientas muy sofisticadas de la teoría de soluciones débiles de ecuaciones en derivadas parciales, realizado por G. Panasenko y co-autores⁵². Se obtienen así diversos

⁴⁶ Model equations for the Eiffel Tower profile, *CR Mecanique* AS 332, 2004.

⁴⁷ Modified shape of the Eiffel Tower determined for an atmospheric boundary-layer wind profile. *Physics of Fluids*, Jun2009, Vol. 21 Issue 6, p067102-067110.

⁴⁸ Un ingeniero aeronáutico de la Universidad de Colorado en Boulder, con estrechos contactos con la E.T.S. de Ingenieros Aeronáuticos de la Universidad Politécnica de Madrid.

⁴⁹ Towing Icebergs, Falling Dominoes, and Other Adventures in Applied Mathematics, Princeton University Press, Princeton, 1998, pp. 150–156.

⁵⁰ Los autores agradecen la mención a este estudio que les fue comunicado por Francisco Higuera, de la E.T.S. de Ingenieros Aeronáuticos de la Universidad Politécnica de Madrid.

⁵¹ *Curso Teórico-Práctico de Ecuaciones Diferenciales*, Nuevas Gráficas, Madrid, 1951, (véase la página 14).

⁵² Véanse referencias en el texto G. Panasenko, *Multiscale Modelling For Structures And Composites*, Springer, Dordrecht, The Netherlands, 2005.

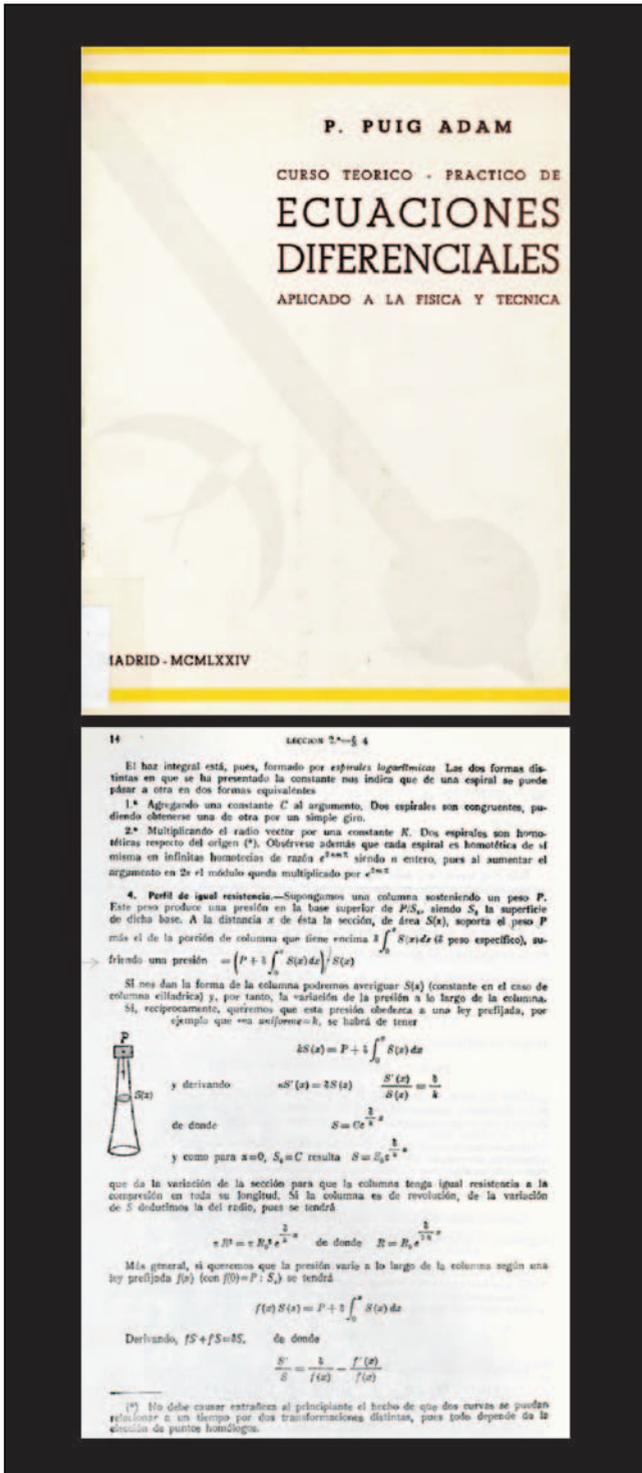


Figura 43. Estudio de torres en el texto de Puig Adam.

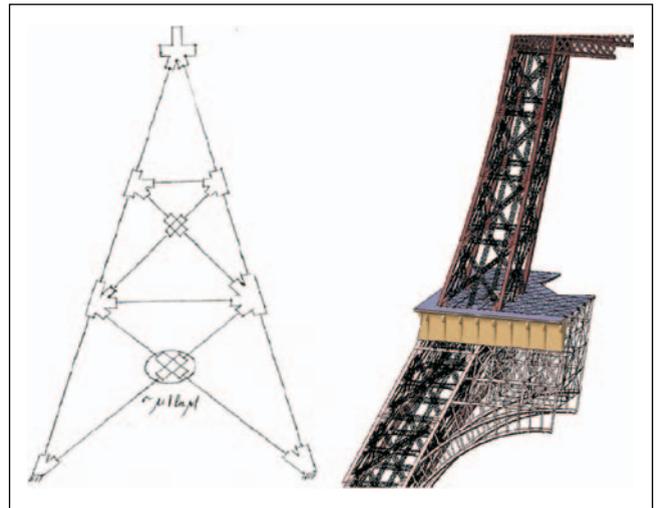


Figura 44. Torre híbrida con elementos de diferentes dimensiones espaciales (tomado del texto de Panasenko) y representación de la estructura híbrida con el programa CATIA.

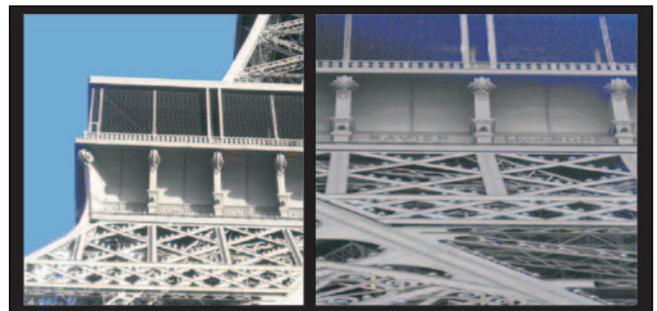


Figura 45. Nombres de científicos en la Tour Eiffel: fotos del autor.

modelos homogeneizados asintóticos proveniente de estructuras compuestas de las que la Torre Eiffel es un excelente ejemplo.

Por mi parte, he de confesar que hace tiempo que en una de mis visitas a Paris me quedé prendado de la lista de nombres que aparecen inscritos en la Torre.

Aparecen allí los nombres de 72 científicos, en cada una de las cuatro caras de la Torre, como un gesto de homenaje al mundo de los científicos⁵³. La relación detallada⁵⁴ es la siguiente:

⁵³ Al parecer, esos nombres desaparecieron durante una de las pinturas de la Torre en el cambio de siglo, pero afortunadamente fueron restablecidas en la reparación realizada el curso 1986-87.

⁵⁴ Pretender asignar un único campo científico a personas de una gran talla científica como son las que aparecen en esa lista es una empresa condenada al fracaso. Sin embargo, en aras de una mínima identificación, aquí nos hemos decidido por reproducir la lista tal y como es presentada en la página oficial de la torre (véase <http://www.tour-eiffel.fr/teiffel/uk/documentation/dossiers/page/savants.html>).

Fachada frente a Trocadero:

1. Seguin (mecánico), 2. Lalande (astrónomo), 3. Tresca (ingeniero y mecánico), 4. Poncelet (geómetra), 5. Bresse (matemático), 6. Lagrange (geómetra), 7. Belanger (matemático), 8. Cuvier (naturalista), 9. Laplace (astrónomo y matemático), 10. Dulong (físico), 11. Chasles (geómetra), 12. Lavoisier (químico), 13. Ampere (matemático y físico), 14. Chevreul (químico), 15. Flachet (ingeniero), 16. Navier (matemático), 17. Legendre (geómetra), y 18. Chaptal (agrónomo y químico).

Fachada frente a Grenelle:

19. Jamin (físico), 20. Gay-Lussac (químico), 21. Fizeau (físico), 22. Schneider (industrial), 23. Le Châtelier (ingeniero), 24. Berthier (minerólogo), 25. Barral (agrónomo, químico, físico), 26. De Dion (ingeniero), 27. Gouïn (ingeniero e industrial), 28. Jouselin (ingeniero), 29. Broca (cirujano), 30. Becquerel (físico), 31. Coriolis (matemático) 32. Cail (industrial), 33. Triger (ingeniero), 34. Giffard (ingeniero), 35. Perrier (geógrafo y matemático), y 36. Sturm (matemático).

Fachada frente a la Academia militar:

37. Cauchy (matemático), 38. Belgrand (ingeniero), 39. Regnault (químico y físico), 40. Fresnel (físico), 41. De Prony (ingeniero), 42. Vicat (ingeniero), 43.

Ebelmen (químico), 44. Coulomb (físico), 45. Poinsot (matemático), 46. Foucault (físico), 47. Delaunay (astrónomo), 48. Morin (matemático y físico), 49. Haüy (minerólogo), 50. Combes (ingeniero y metalúrgico), 51. Thénard (químico), 52. Arago (astrónomo y físico), 53. Poisson (matemático), y 54. Monge (geómetra).

Fachada frente a la vista de París (La Bourdonnais):

55. Petiet (ingeniero), 56. Daguerre (pintor y físico), 57. Wurtz (químico), 58. Le Verrier (astrónomo), 59. Perdonnet (ingeniero), 60. Delambre (astrónomo), 61. Malus (físico), 62. Breguet (físico y constructor), 63. Polonceau (ingeniero), 64. Dumas (químico), 65. Clapeyron (ingeniero), 66. Borda (matemático), 67. Fourier (matemático), 68. Bichat (anatomista y fisiólogo), 69. Sauvage (mecánico), 70. Pelouze (químico), 71. Carnot (matemático), y 72. Lamé (geómetra).

Como se puede observar, la mayoría de ellos son los cultivadores y fundadores de importantes ramas de la ciencia y la ingeniería, muchos de ellos eran miembros de la Academia de Ciencias de París. Algunos de ellos fueron incluso miembros de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales española en calidad de, primeros, Académicos Correspondientes Extranjeros. Pero esa es otra historia, igualmente apasionante⁵⁵.

⁵⁵ Véase, por ejemplo, J. I. Díaz, *Observación y Cálculo: los comienzos de la Real Academia de Ciencias y sus primeros Correspondientes Extranjeros*, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 2009.